

Ф. Д. Сорокин, А. В. Мильков

РАСЧЕТ ДЕФОРМАЦИЙ ФОТОПЛАСТИНКИ В ТЕЛЕСКОПЕ ШМИДТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ ОСНАЩЕННЫХ УПРУГИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Фотографические обзоры звездного неба, выполненные с помощью телескопов Шмидта, служат практически единственным источником информации о слабых объектах. Отсутствие методов астрометрической редукции наблюдений, учитывающих особенности телескопа Шмидта, приводит к значительным остаточным систематическим ошибкам. Когда плоская фотопластинка изгибается на сферическом основании, что имеет место в камере Шмидта, то возникают деформации, которые необходимо учитывать при измерениях экспонированных пластинок. Разработано аналитическое и численное решение для фотопластины, находящейся в полном контакте со сферической опорой.

В 1932 г. Бернардт Шмидт описал оптическую систему, известную с тех пор как камера Шмидта. Основной принцип камеры состоит в том, что у вогнутого сферического зеркала с диафрагмой в центре кривизны все оси равноправны, что обеспечивает одинаково хорошее изображение во всех точках поля. Поле камеры — кривое, причем радиус кривизны равен фокусному расстоянию. При большом относительном отверстии сферическая абберрация становится ощутимой. Чтобы исправить этот дефект, Шмидт предложил поставить в центре кривизны зеркала тонкую стеклянную асферическую коррекционную пластину (рис. 1). Даже, если эта пластинка неахроматична, она снижает до 2...3 % первоначальной величины сферическую абберрацию во всей области длин волн, в которой обычно фотографируют. Это позволяет получить оптимальное качество изображения на большом поле при относительном отверстии на порядок больше, чем у линзовых систем.

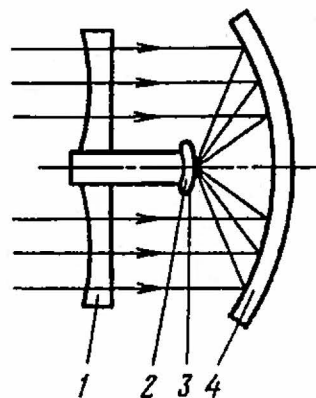


Рис. 1. Схема телескопа Шмидта:

1 — коррекционная пластина; 2 — сферическая опора; 3 — фотопластинка, 4 — зеркало

Большое поле телескопа Шмидта делает его незаменимым инструментом для создания каталогов и обзоров звездного неба. Первый обзор северного неба был выполнен в 50-х годах с помощью Паломарского телескопа, расположенного в Канаде. Фотографирование южного неба проводилось телескопами Шмидта, идентичными Паломарскому, расположенными в Австралии и Чили. Относительно недавно, в 90-х годах, завершен второй обзор, причем использовались те же телескопы, но улучшенных конструкций. Обзоры состоят из многих тысяч пар фотопластинок, экспонированных с красным и синим светофильтрами, и являются наиболее полными источниками информации о видимых объектах, в том числе слабых. Сравнивая координаты звезд в Первом и Втором обзорах, можно определить их движение за прошедшие между обзорами десятилетия. Эта информация имеет исключительную важность для астрономии.

Широкое поле является главным достоинством телескопа Шмидта, но то, что это поле неплоское, порождает определенные проблемы. Из-за кривизны поля квадратную фотопластинку приходится изгибать, чтобы придать ей сферическую форму (рис. 2). Фотопластинка экспонируется в деформированном состоянии, а измеряется после проявления в исходном плоском состоянии. Возникающая в результате деформации погрешность координат довольно значительна и достигает для Паломарского и Англо-Австралийского телескопов 13 угловых секунд. Этот недостаток телескопа хорошо известен, и по этой причине шмидтовские обзоры никогда не рассматривались как точный астрометрический материал.

Для уменьшения погрешности применяется так называемая редукция, которая заключается в удалении из наблюдаемых координат некоторых гладких функций. Обычным средством при этом служит метод наименьших квадратов. Кроме этого, астрономы имеют в своем арсенале осесимметричное решение Шеферда [1]. Решение Шеферда, опубликованное в 1953 г., настолько прочно вошло

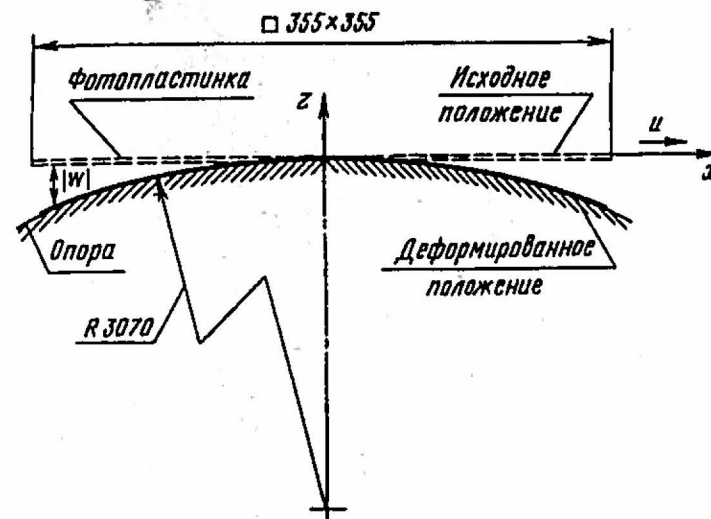


Рис. 2. Деформирование фотопластинки в кассете телескопа

в практику астрономических измерений, что его часто используют без всякого анализа и применяют как единственное средство исправления шмидтовских наблюдений.

Вместо квадратной фотопластинки Шеферд рассмотрел круглую плоскую пластинку, прижатую к сфере. Его решение было построено на следующих предположениях:

1. Пластика остается упругой и изотропной во время деформации;
2. Пластика контактирует со сферической опорой без зазоров по всей поверхности;
3. Трение между пластинкой и сферической опорой отсутствует;
4. На краю пластинки нет радиальных усилий.

Предсказанное Шефердом смещение ϵ положения звезды в радиальном направлении, вызванное деформацией, имеет вид

$$\epsilon = \frac{1-\mu}{16} \gamma^2 \lambda - \frac{1-3\mu}{48} \lambda^3, \quad (1)$$

где μ — коэффициент Пуассона материала (в данном случае — стекла), из которого изготовлена пластинка; $\gamma \approx a/R$ — угловой радиус поля зрения (от центра пластинки до прижимного кольца) в радианах (a — радиус круглой пластинки, R — радиус сферы (равный фокусному расстоянию телескопа Шмидта)); λ — угловое расстояние точки пластинки от центра, в радианах.

Несмотря на то, что поправка (1) получена для круглой пластинки, она позволяет снизить почти на порядок погрешность реальных квадратных фотопластинок. Однако этого недостаточно, так как точность измерительного микроскопа еще на порядок лучше. Таким образом, актуальной является задача о деформациях

реальных квадратных фотопластинок, прижатых к сферическому основанию.

Аналитический расчет поля перемещений квадратной фотопластины методом Ритца. Исходные предположения Шеферда естественно будет распространить на реальный случай квадратной фотопластины (см. рис. 2). Искомые перемещения частиц фотозмусильи связаны с перемещениями срединной поверхности u и v -гипотезой жесткой нормали (u, v, w — перемещения вдоль осей X, Y, Z):

$$\begin{aligned} u_{\phi} &= u - \frac{h}{2} \frac{\partial w}{\partial x}; \\ v_{\phi} &= v - \frac{h}{2} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2)$$

Как и в решении Шеферда, вертикальное перемещение заранее известно — оно определяется радиусом кривизны сферы, к которой прижата пластинка:

$$w = -\frac{x^2 + y^2}{2R}. \quad (3)$$

Выражение (3) является приближенным уравнением сферы, которое мало отличается от точного, так как размеры пластинки гораздо меньше радиуса кривизны R . При радиусе $R = 3070$ мм и стороне квадрата $2a = 355$ мм, отличие уравнения (3) от точного уравнения сферы не превышает 17 мкм. Так как строится приближенное решение, то на данном этапе в уравнении сферы нет необходимости учитывать изменения координат x и y , возникающих от перемещений u и v .

Точные аналитические выражения для горизонтальных перемещений найти, скорее всего, невозможно, так как в нелинейной теории пластин известны аналитические решения лишь в простейших случаях. Для нахождения приближенных решений универсальным средством служит принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа), согласно которому, в положении равновесия упругой системы полная потенциальная энергия минимальна.

В рассматриваемом случае полная потенциальная энергия сводится к энергии упругих деформаций. Внешние силы, а именно давление сферической опоры на пластинку, можно не учитывать, так как они не совершают работы на возможных перемещениях. Силы направлены по нормали к сфере, а возможные перемещения — по касательной.

Энергия деформаций распадается на энергию изгиба и энергию растяжения-сжатия (энергия мембранных деформаций):

$$U = U_{\text{и}} + U_{\text{р}}. \quad (4)$$

Энергия изгиба $U_{\text{и}}$ пластинки [2] выражается только через вертикальные перемещения w , которые являются заданными, поэтому

при варьировании горизонтальных перемещений u и v эта часть энергии меняться не будет. Таким образом, задача свелась к отысканию минимума мембранной энергии деформаций пластинки, лежащей на идеально гладкой сферической поверхности:

$$U[u(x, y), v(x, y)] \rightarrow \min, \quad (5)$$

где

$$U = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \iint (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\mu\epsilon_x\epsilon_y + \frac{1-\mu}{2}\gamma_{xy}^2) dx dy, \quad (6)$$

$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ — деформации, E — модуль упругости материала, h — толщина, а интеграл вычисляется по всей площади квадрата.

Деформации срединной поверхности в нелинейной теории пластин имеют следующий вид [2, 3]:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (7)$$

Последние слагаемые в системе уравнений (7) как раз и отличаются нелинейную теорию пластин от линейной. Именно эти слагаемые вносят неоднородность в разрешающую систему уравнений. Если их опустить, то минимум энергии найдется тривиально $u = v = 0$.

В рассматриваемой задаче уравнения (7) конкретизируются с учетом условия (3):

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R} \right)^2; \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{R} \right)^2; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{x}{R} \frac{y}{R}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подстановка уравнений (8) в равенство (6) и варьирование энергии по перемещениям приводят к системе двух дифференциальных уравнений в частных производных, которые точно (в рамках сделанных предположений) описывают искомые функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1-\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1+\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= -(3-\mu)\frac{x}{R^2}; \\ 2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (1-\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (1+\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -(3-\mu)\frac{y}{R^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Систему уравнений (9) необходимо дополнить граничными условиями, которые здесь не выписаны, так как задача разыскания точного аналитического решения не ставилась. Приближенное решение было найдено прямым вариационным методом — методом Ритца.

Перемещения u и v разыскивались в виде полиномов 7-го порядка:

$$\begin{aligned} u &= C_1 x + C_2 x y^2 + C_3 x^3 + C_4 x y^4 + C_5 x^3 y^2 + C_6 x^5 + \\ &\quad + C_7 x y^6 + C_8 x^3 y^4 + C_9 x^5 y^2 + C_{10} x^7; \\ v &= C_1 y + C_2 y x^2 + C_3 y^3 + C_4 y x^4 + C_5 y^3 x^2 + C_6 y^5 + \\ &\quad + C_7 y x^6 + C_8 y^3 x^4 + C_9 y^5 x^2 + C_{10} y^7. \end{aligned} \quad (10)$$

При построении полиномов учитывалось несколько видов симметрии — решение должно быть симметричным относительно координатных осей и диагоналей квадрата (рис. 3):

$$\begin{aligned} u(-x, y) &= -u(x, y); \\ u(x, -y) &= u(x, y); \\ v(-x, y) &= v(x, y); \\ v(x, -y) &= -v(x, y); \\ u(x, y) &= v(y, x). \end{aligned} \quad (11)$$

Слагаемые, не удовлетворяющие условиям симметрии, из полиномов исключены. Таким образом, симметрия существенно упрощает решение. Вместо 56 независимых коэффициентов, которые содержались бы в двух полных полиномах 7-го порядка при отсутствии симметрии, необходимо найти всего 10.

Неизвестные коэффициенты находятся из условия минимума энергии деформаций. Подстановка полиномов (10) в систему (8) и затем в выражение (6) превращает энергию U в функцию многих переменных:

$$U = U(C_1, C_2, \dots, C_{10}),$$

а условие минимума принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial C_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, 10).$$

Выкладки, необходимые для составления и решения системы (11), весьма громоздки, но совершенно элементарны. Аналитическое решение системы (11) было проведено с помощью компьютерной алгебры (Maple V). В результате получены коэффициенты полиномов,

из которых из-за громоздкости приведем только первый и последний:

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{32} \frac{a^2(5576184 - 2838722\mu - 2670505\mu^2 - 68182\mu^3 + 1225\mu^4)}{Z R^2}; \\ &\dots\dots\dots \\ C_{10} &= -\frac{143}{16} \frac{(226 + 357\mu + 131\mu^2)}{Z a^4 R^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $Z = -2467724 - 1208496\mu - 28609\mu^2 + 450\mu^3$. Аналогичное решение получено в работе [4]. Как видно из выражений (12) ни модуль упругости E , ни толщина h в коэффициенты полиномов не входят — это служит следствием того, что множитель Eh сокращается во всех уравнениях (11). Перемещения точек фотопластинки находятся по выражениям (2), с учетом равенства (3):

$$\begin{aligned} u_\phi &= u + \frac{h}{2} \frac{x}{R}; \\ v_\phi &= v + \frac{h}{2} \frac{y}{R}. \end{aligned} \quad (13)$$

Полученное решение сравнивалось с реально наблюдаемыми искажениями изображения на фотопластинках. Реальные искажения находились осреднением отклонений координат по нескольким сотням фотопластинок. Весьма наглядно удалось провести сопоставление не полных, а так называемых, редуцированных перемещений. Редукция здесь заключается в удалении из $u_\phi(x, y)$, $v_\phi(x, y)$ полиномов 3-го порядка, найденных методом наименьших квадратов. На рис. 3 приведены поля перемещений реальные и рассчитанные по уравнениям (13) после редукции. При расчете приняты параметры реальной фотопластинки $h = 1$ мм, $\mu = 0,2$, $2a = 355$ мм, $R = 3070$ мм. Сопоставление редуцированных перемещений говорит само за себя — поля перемещений в обоих случаях внешне выглядят совершенно одинаково.

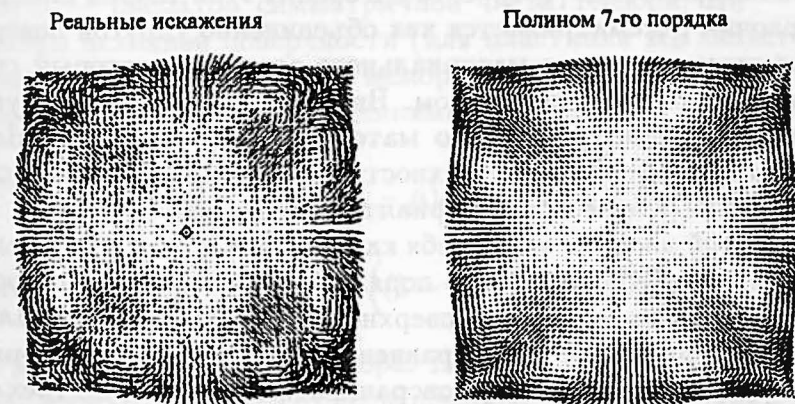


Рис. 3. Сравнение реальных (слева) и расчетных (справа) погрешностей телескопа, редуцированных полным полиномом 3-го порядка

Количественная проверка показывает, что найденное решение описывает реальные искажения с ошибкой, не превышающей 7 мкм (0,5 угл. с), а среднеквадратическая ошибка составляет ~ 2,5 мкм (0,17 угл. с). Максимальная полная погрешность при этом составляет 197 мкм. Таким образом, найденное решение является весьма существенным улучшением приближения Шеферда, однако не может рассматриваться как окончательное. Основными причинами несоответствия являются следующие: неточность приближения сферы параболоидом (3); микронеровности на поверхности сферы; неучет изменения вертикальных координат при горизонтальных перемещениях; предположение о двухстороннем контакте пластинки и сферической опоры; неточный учет больших поворотов в квадратичной теории пластин.

При создании Второго Паломарского обзора конструкция кассеты телескопа претерпела ряд изменений, направленных на увеличение точности. Наиболее существенным нововведением (1989 г.) стала вакуумная система, присасывающая фотопластинку к сферической опоре, что существенно улучшает контакт между ними и устраняет, или почти устраняет, четвертую причину. Остальные причины требуют исследования. Наиболее трудным, при этом, является вопрос о погрешности из-за приближенного характера квадратичной теории пластин. Исчерпывающим ответом на него может быть только использование теории, точно учитывающей большие повороты. Максимальный поворот деформированной пластинки происходит в ее углу и имеет величину около 5°. Такие повороты следует считать большими с точки зрения требуемой точности расчета — максимальное перемещение пластины составляет 10,26 мм, а погрешность измерительного микроскопа 0,5 мкм.

Конечно-элементное решение с использованием элементов теории оснащенных упругих поверхностей. Точный учет конечных поворотов выполняется в так называемой теории оснащенных упругих поверхностей [4, 5]. С точки зрения этой теории пластинка или оболочка рассматривается как объединение упругой поверхности и ориентированного материального элемента, который связан с поверхностью упругим образом. Внешняя нагрузка действует на оболочку через посредничество материального элемента. Накладывая на взаимодействие поверхности и элемента различные связи, можно прийти к известным вариантам уравнений оболочек. Если материальный элемент ведет себя как жесткая нормаль, то получаются уравнения Кирхгофа 8-го порядка. Если он может поворачиваться вокруг касательных к поверхности, но не вокруг нормали, то получаются уравнения типа уравнений Тимошенко 10-го порядка. Если же разрешить элементу поворачиваться вокруг всех трех осей, то получатся редко используемые уравнения 12-го порядка. Шмидтовские пластинки имеют большие размеры при малой толщине,

что предопределяет использование простейшего варианта Кирхгофа.

К сожалению, авторы работ по теории оснащенных упругих поверхностей, как правило, совершенно не заботятся о возможности численной реализации их уравнений. В связи с этим, приведенные в работах [4, 5] и аналогичных весьма общие соотношения приходится существенным образом адаптировать для решения на компьютере.

Для построения конечного элемента требуются далеко не все уравнения теории. Необходимые уравнения приведены далее. Тензор кратностей деформаций Λ и тензор деформаций ϵ определяются обычным образом через градиент радиуса-вектора $\mathbf{r}$ деформированной оболочки:

$$\begin{aligned}\Lambda &= \sqrt{\nabla \mathbf{r} \cdot (\nabla \mathbf{r})^T}; \\ \epsilon &= \Lambda - E_0,\end{aligned}\quad (14)$$

где ∇ — набла оператор (оператор градиента) исходной поверхности, E_0 — плоский единичный тензор исходной поверхности.

Большие повороты поверхности описываются тензором поворота L :

$$\begin{aligned}L &= (\Lambda^{-1} \cdot \nabla \mathbf{r} + n_0 \mathbf{n})^T; \\ \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|},\end{aligned}\quad (15)$$

где n_0 , $\mathbf{n}$ — нормали к исходной и деформированной оболочке, а индексами x , y отмечено дифференцирование по координатам.

Тензор изгиба поверхности определяется через градиент нормали и тензор поворота:

$$\mathbf{k} = \text{Sym}\{(\nabla \mathbf{n}) \cdot L\} - K_0, \quad (16)$$

где Sym — оператор симметричной части тензора, K_0 — тензор кривизны исходной поверхности (для пластинки K_0 является тождественным нулем). Тензоры мембранных усилий и моментов определяются обычными соотношениями упругости:

$$\begin{aligned}T &= \frac{Eh}{(1 - \mu^2)} \left((1 - \mu)\epsilon + \mu Sp(\epsilon)E_0 \right); \\ M &= \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \left((1 - \mu)\mathbf{k} + \mu Sp(\mathbf{k})E_0 \right),\end{aligned}\quad (17)$$

где Sp — оператор следа тензора. Деформации предполагаются малыми, несмотря на то, что углы поворота и перемещения считаются большими. Удельная энергия деформаций определяется сверткой тензоров:

$$U_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{T} \bullet \bullet \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{M} \bullet \bullet \mathbf{k}). \quad (18)$$

Если перемещения заданы аналитическими выражениями, то группа формул (14)–(18) позволяет вычислить удельную энергию в любой точке с помощью численного дифференцирования. Нет необходимости переписывать уравнения в проекциях и компонентах, так как современное программное обеспечение позволяет проводить все вычисления непосредственно с векторами и тензорами, которые хранятся в памяти компьютера как одно- и двумерные массивы. Такие операции, как взятие следа, вычисление свертки, обращение тензора и другие, довольно несложно программируются.

Для построения конечно-элементной модели четвертая часть пластинки разбивается на $m \times m$ квадратных конечных элементов. В пределах каждого из них горизонтальные перемещения задаются полиномами с 12-ю коэффициентами:

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2x + u_3y + u_4x^2 + u_5xy + u_6y^2 + u_7x^3 + \\ &\quad + u_8x^2y + u_9xy^2 + u_{10}y^3 + u_{11}xy^3 + u_{12}yx^3; \\ v &= v_1 + v_2x + v_3y + v_4x^2 + v_5xy + v_6y^2 + v_7x^3 + \\ &\quad + v_8x^2y + v_9xy^2 + v_{10}y^3 + v_{11}xy^3 + v_{12}yx^3. \end{aligned} \quad (19)$$

Коэффициенты полиномов выражаются обычным для МКЭ образом через узловые перемещения и их производные. В каждом из 4-х углов квадратного элемента задаются перемещения u , v и их производные по двум координатам u_x , u_y , v_x , v_y , т.е. всего 6 величин в каждом углу.

Таким образом, для 24 коэффициентов полиномов имеется 24 узловых величины. Вертикальное перемещение находится по уравнению сферы, в котором учтены изменения горизонтальных координат:

$$w = \sqrt{R^2 - (x + u)^2 - (y + v)^2} - R, \quad (20)$$

этим устраняется первая и третья причины возникновения погрешностей. Удельная энергия находится по формулам (14)–(18), в которых производные вычисляются как симметричные конечные разности. Шаг численного дифференцирования выбран весьма малым: 0,01 мкм, что при 18 значащих цифрах в числе дает достаточную точность и не приводит к численной неустойчивости. Полная энергия элемента определяется численным интегрированием удельной энергии по 9 гауссовым точкам.

Задача решалась конечно-элементным комплексом FEM, для которого выражение энергии (или процедура, ее вычисляющая) является основной информацией об элементе. Дифференцируя энергию по обобщенным перемещениям, FEM автоматически находит

матрицу жесткости и вектор узловых нагрузок элемента. Остальные стандартные действия — нумерация узлов, построение глобальной матрицы жесткости, решение глобальной системы и т.п. — также выполняются автоматически. Такие особенности конечно-элементного комплекса FEM позволяют очень быстро создавать новые и нестандартные конечные элементы — достаточно описать степени свободы и любым способом (численно, либо аналитически) выразить через них энергию. Дополнительно требуется совсем немного, — элемент должен сам себя нарисовать и сообщить внешней подпрограмме величины, которые необходимо вывести в качестве результата.

Граничными условиями в данной задаче являются условия симметрии относительно координатных осей:

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{x=0} = 0; \\ v|_{y=0} &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}|_{y=0} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

и условия отсутствия нагрузок на внешней границе пластинки.

Для контроля погрешности дискретизации пластинка разбивалась на 10×10 , 20×20 и 40×40 конечных элементов. Так как определяющие соотношения (14)–(18) — нелинейны, то решение ищется итерациями. В качестве начального приближения использовали найденное аналитическое решение. Итераций потребовалось совсем мало. Уже на третьей итерации перестают меняться первые пять значащих цифр в перемещениях. Результат получился довольно неожиданный — аналитическое решение отклоняется от численного в горизонтальном направлении не более чем на 0,7 мкм. Это повышает оценку аналитического решения (10), (12) как очень хорошего приближения, но требует комментария.

Столь хорошее совпадение численного и аналитического решений получилось в результате взаимного уничтожения погрешностей. Как отмечалось ранее, замена параболоида (3) сферой приводит к изменению вертикальной координаты угла пластинки на 17 мкм вниз (сфера лежит ниже параболоида). Учет влияния горизонтальных перемещений на вертикальную координату приводит к дополнительным вертикальным перемещениям того же уровня, но вверх. Каждое из этих двух вертикальных отклонений, взятых по отдельности, приводит к возникновению горизонтальных отклонений порядка 1,5...2 мкм. Взятые же вместе обе погрешности нивелируют друг друга, что и дает столь оптимистический результат. Такое удачное сочетание погрешностей является случайным и имеет отношение только к конкретной конструкции телескопа. При других сочетаниях размеров сферы и пластинки оценка точности

аналитического решения может измениться. Обзоры, однако, выполняются именно на тех телескопах и при таком сочетании размеров, для которых найденное аналитическое решение подходит очень хорошо.

Сделанный вывод является результатом сравнения численного и аналитического решений. Сравнение того и другого решений с реальными наблюдениями не дает столь хорошего совпадения. Остаточные отклонения, составляющие несколько микрометров, пока еще не удалось полностью объяснить. Разумеется, это связано с тем, что здесь исследованы далеко не все причины возникновения погрешностей. Первый Паломарский обзор выполнялся без вакуумной системы и, как отмечают наблюдатели, между пластинкой и сферой существовали малые и большие воздушные карманы. Возможно, этим объясняется довольно значительное отклонение реальных координат в 7 мкм от предлагаемого аналитического решения, собственная погрешность которого, как выяснилось, меньше 1 мкм. Второй Паломарский обзор, который был выполнен на усовершенствованной кассете с использованием вакуумной системы, существенно лучше приближен к аналитическому решению (10), (12). Отклонения координат от предлагаемой модели для нового обзора снизились в 2 раза по сравнению с первым и составляют не более 3,5 мкм.

Выводы. Предложена математическая модель погрешностей телескопа Шмидта. Получены аналитические выражения, которые описывают наблюдаемые отклонения координат звезд с недостижимой ранее точностью. Проанализировано влияние ряда факторов, вызывающих несовпадение расчетных и реальных отклонений. С помощью конечно-элементного решения повышенной точности, в котором использовались уравнения теории оснащенных упругих поверхностей, показано, что погрешность найденного аналитического решения не превышает 0,7 мкм, если контакт фотопластинки со сферой предполагается двухсторонним. Хорошее соответствие результатов расчета Второму Паломарскому обзору подтверждает правильность сделанных предположений и адекватность построенной модели погрешностей телескопа Шмидта.

Авторы выражают благодарность К.В. Куимову и А.В. Кузьмину за предоставленный наблюдательный материал и ценные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shepherd W. M. The deformation of photographic plate in a Schmidt camera // MNRAS. V. 113 (1953). P. 450.
2. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.

3. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978. – 308 с.
4. Куимов К. В., Сорокин Ф. Д., Кузьмин А. В., Барушева Н. Т. Новый метод учета систематических ошибок телескопа Шмидта // Астрон. журн. – 2000. – Т. 77. – Вып. 5. – С. 281.
5. Жилин П. А. Механика деформируемых оснащенных поверхностей / Тр. IX Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. – Л.: Изд-во "Судостроение", 1975.
6. Шкутин Л. И. Механика деформируемых гибких тел. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.

Статья поступила в редакцию 21.11.2000

Федор Дмитриевич Сорокин родился в 1960 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1983 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры "Прикладная механика" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 20 научных работ в области механики стержней, пластин и оболочек.

F.D. Sorokin (b. 1960) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1983. PhD (Eng), ass. professor of "Applied Mechanics" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of about 20 publications in the field of mechanics of rods, plates and shells.



Александр Валерьевич Милюков родился в 1976 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2000 г. Аспирант кафедры "Прикладная механика" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Работает в области механики конструкций, выполненных из стекла.

A.V. Milkov (b. 1976) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2000. Post-graduate of "Applied Mechanics" department of the Bauman Moscow State Technical University. Works in the field of mechanics of glass structures.

